

Подробни решения с Формула за Квадратно Уравнение

Страница 69: Модулни уравнения

Задача 1: $|2x - 1| + 3 \cdot |2x - 1| = 12$

$$4 \cdot |2x - 1| = 12$$

$$|2x - 1| = 3$$

$$1) 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2) 2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Отговор: $x \in \{-1; 2\}$

Задача 5: $|x^2 - 2x - 4| = 4$

$$1) x^2 - 2x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Коефициенти: $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$

Прилагане на формула за корени:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} =$$

$$\frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 4, x_2 = -2$$

$$2) x^2 - 2x - 4 = -4 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x_3 = 0, x_4 = 2$$

Отговор: $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

Задача 6: $|x^2 + 2x - 4| = 4$

$$1) x^2 + 2x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = 2, c = -8$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8))}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{(4 + 32)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 2, x_2 = -4$$

$$2) x^2 + 2x - 4 = -4 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_4 = -2$$

Отговор: $x \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Задача 7: $|x^2 - 2x - 1| = 2$

$$1) x^2 - 2x - 1 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = -2, c = -3$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{((-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3))}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{(4 + 12)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$2) x^2 - 2x - 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

Отговор: $x \in \{-1; 1; 3\}$

Задача 8: $|x^2 + 5x| = 6$

$$1) x^2 + 5x = 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = 5, c = -6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6))}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 + 24)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -6$$

$$2) x^2 + 5x = -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = 5, c = 6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_3 = -2, x_4 = -3$$

Отговор: $x \in \{-6; -3; -2; 1\}$

Задача 9: $|x^2 + 4x| = 3$

$$1) x^2 + 4x = 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = 4, c = -3$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$2) x^2 + 4x = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = -3$$

Отговор: $x \in \{-3; -1; -2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}\}$

Страница 75: Показателни уравнения (прости)

Задача 5 а) $2^{x^2+3x} = 16$

$$2^{x^2+3x} = 2^4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

Коефициенти: $a = 1, b = 3, c = -4$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4$$

Страница 79: Показателни уравнения чрез полагане

Задача 1: $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

Полагаме: $2^x = y$ ($y > 0$)

Уравнението става: $y^2 - 10y + 16 = 0$

Коефициенти: $a = 1, b = -10, c = 16$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$y_1 = 8, y_2 = 2$$

Връщане към оригиналната променлива:

$$1) 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

$$2) 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Отговор: $x \in \{1; 3\}$

Задача 4: $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Полагаме: $3^x = y$ ($y > 0$)

Уравнението става: $y^2 - 5y + 6 = 0$

Коефициенти: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

Отговор: $x \in \{1; \log_3 2\}$

Страница 83: Сложни показателни уравнения

Задача 7: $6 / (4^x - 2) - 5 / (4^x + 1) = 2$

Полагаме: $4^x = y$ ($y > 0$, $y \neq 2$)

$$6/(y - 2) - 5/(y + 1) = 2 \Rightarrow 6 \cdot (y + 1) - 5 \cdot (y - 2) = 2 \cdot (y - 2) \cdot (y + 1)$$

$$6y + 6 - 5y + 10 = 2 \cdot (y^2 - y - 2)$$

$$y + 16 = 2y^2 - 2y - 4 \Rightarrow 2y^2 - 3y - 20 = 0$$

Коефициенти: $a = 2$, $b = -3$, $c = -20$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4}$$

$$y_1 = 4, y_2 = -2.5 \text{ (отпада, понеже } y > 0)$$

$$4^x = 4 \Rightarrow x = 1$$