

страница 69

1. $|2x - 1| + 3|2x - 1| = 12$

2. $7|x + 3| - 5|x + 3| = 6$

3. $|x + 3| - |5x + 15| = -8$

4. $|6x - 2| - |9x - 3| = -5$

5. $|x^2 - 2x - 4| = 4$

6. $|x^2 + 2x - 4| = 4$

7. $|x^2 - 2x - 1| = 2$

8. $|x^2 + 5x| = 6$

9. $|x^2 + 4x| = 3$

10. $|3x^2 - 5x + 1| = 1$

11. $|x^2 + 5x + 4| = 4$

12. $|x^2 - 4x + 1,5| = 1,5$

13. $|x^2 - 7x + 3| = 3$

14. $|x^2 + 2x + 9| = 1$

15. $|x^2 - 3x + 2| = 0$

16. $|2x^2 - 3x - 2| = -1$

17. $|(x + 3)^2 - 2(x + 1)| = 4$

18. $|(x - 2)^2 - 2(x - 1)| = 1$

19. $|x^4 - 5| = 4$

20. $|16x^4 - 5| = 4$

21. $|x^4 - 5x^2 + 2| = 2$

22. $|x^4 - 4x^2 + 1,5| = 1,5$

23. $|x^4 - 7x^2 + 3| = 3$

24. $|x^4 + 2x^2 - 4| = 4$

страница 75

5. а) $2^{x^2+3x} = 16$

б) $3^{x^2+2x} = 27$

в) $5^{x^2+2x} = 125$

г) $7^{x^2+x} = 49$

6. а) $3 \cdot 2^x + 2^{x+2} = 28$

б) $5 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 72$

в) $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x = 245$

г) $5^{x+2} - 7 \cdot 5^x = 450$

7. а) $2^{x+3} - 5 \cdot 2^x = 48$

б) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 135$

в) $7^{x+2} - 6 \cdot 7^x = 301$

г) $5^{x+3} - 3 \cdot 5^{x+2} = 250$

8. а) $2^{x^2+2x} \cdot 8^x = 4^3$

б) $3^{x^2+x} \cdot 9^{x+2} = 81$

в) $5^{x^2-x} \cdot 25^{2x-1} = 25$

г) $7^{x^2+2x} \cdot 49^{x-1} = 343$

9. а) $2^{5x-2} = \frac{1}{8^{x-2}}$

б) $3^{2x+6} = \frac{1}{9^{x+3}}$

в) $5^{3x+2} = \frac{1}{25^{x+4}}$

г) $49^{3x-1} = \frac{1}{7^{x+2}}$

10. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}$

б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+x} = \left(\frac{125}{27}\right)^{x+1}$

в) $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+3x} = \left(\frac{81}{4}\right)^{x+2}$

г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{49}{9}\right)^x$

11. а) $0,125 \cdot 2^{x+5} = 4^{x+2}$

б) $0,25 \cdot 8^{x+1} = 4^x$

в) $\sqrt[3]{2^{x+5}} = \frac{1}{8}$

г) $\sqrt[3]{9^{x+2}} = \frac{1}{81}$

12. а) $2^{x+1} = 3^x$

б) $3^{x-2} = 5^x$

в) $2^{2x-3} = 7^x$

г) $5^{x-5} = 7^x$

страница 79

1. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

2. $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

3. $5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$

4. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

5. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$

6. $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$

7. $9^x - 2 \cdot 3^x - 8 = 0$

8. $25^{x-2} - 24 \cdot 5^{x-3} - 1 = 0$

9. $3^x - 3^{2-x} - 8 = 0$

10. $3 \cdot 9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+1} - 1 = 0$

11. $16^x - 5 \cdot 4^{x+1} + 64 = 0$

12. $2^{2(x^2-x)-3} - 2^{x^2-x-2} - 1 = 0$

13. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

14. $4^{\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0$

15. $9^{\sqrt{3x}} - 12 \cdot 3^{\sqrt{3x}} + 27 = 0$

16. $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$

17. $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$

18. $4^x + 2 \cdot 14^x - 3 \cdot 49^x = 0$

19. $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$

20. $4 \cdot 25^x - 21 \cdot 10^x - 25 \cdot 4^x = 0$

страница 83

1. $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$

2. $2^x + 2^{2-x} = 5$

3. $3^x + 3^{2-x} = 10$

4. $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$

5. $4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 2^{2x}$

6. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 5^x + 5^{x+1}$

7. $\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2$

8. $\frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3$

9. $8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0$

10. $4 \cdot 20^x - 20 \cdot 5^{x-1} - 5 \cdot 4^{x+1} + 20 = 0$

11. $5 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0$

12. $6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 = 0$

страница 69

Решения на модулните уравнения (Задачи 1 - 24)

Задача 1: $|2x - 1| + 3|2x - 1| = 12$

$$4|2x - 1| = 12 \Rightarrow |2x - 1| = 3$$

$$1) 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2) 2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Отговор: $x \in \{-1; 2\}$

Задача 2: $7|x + 3| - 5|x + 3| = 6$

$$2|x + 3| = 6 \Rightarrow |x + 3| = 3$$

$$1) x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$$

$$2) x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6$$

Отговор: $x \in \{-6; 0\}$

Задача 3: $|x + 3| - |5x + 15| = -8$

$$|x + 3| - 5|x + 3| = -8 \Rightarrow -4|x + 3| = -8 \Rightarrow |x + 3| = 2$$

$$1) x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$$

$$2) x + 3 = -2 \Rightarrow x = -5$$

Отговор: $x \in \{-5; -1\}$

Задача 4: $|6x - 2| - |9x - 3| = -5$

$$2|3x - 1| - 3|3x - 1| = -5 \Rightarrow -|3x - 1| = -5 \Rightarrow |3x - 1| = 5$$

$$1) 3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$2) 3x - 1 = -5 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -4/3$$

Отговор: $x \in \{-4/3; 2\}$

Задача 5: $|x^2 - 2x - 4| = 4$

1) $x^2 - 2x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2$

2) $x^2 - 2x - 4 = -4 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Отговор: $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

Задача 6: $|x^2 + 2x - 4| = 4$

1) $x^2 + 2x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$

2) $x^2 + 2x - 4 = -4 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

Отговор: $x \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Задача 7: $|x^2 - 2x - 1| = 2$

1) $x^2 - 2x - 1 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

2) $x^2 - 2x - 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Отговор: $x \in \{-1; 1; 3\}$

Задача 8: $|x^2 + 5x| = 6$

1) $x^2 + 5x = 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -6, x = 1$

2) $x^2 + 5x = -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -2$

Отговор: $x \in \{-6; -3; -2; 1\}$

Задача 9: $|x^2 + 4x| = 3$

1) $x^2 + 4x = 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow D = 16 + 12 = 28 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{7}$

2) $x^2 + 4x = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

Отговор: $x \in \{-3; -1; -2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}\}$

Задача 10: $|3x^2 - 5x + 1| = 1$

1) $3x^2 - 5x + 1 = 1 \Rightarrow 3x(x - 5/3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5/3$

2) $3x^2 - 5x + 1 = -1 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2/3, x = 1$

Отговор: $x \in \{0; 2/3; 1; 5/3\}$

Задача 11: $|x^2 + 5x + 4| = 4$

1) $x^2 + 5x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -5$

2) $x^2 + 5x + 4 = -4 \Rightarrow x^2 + 5x + 8 = 0 \Rightarrow D = 25 - 32 = -7 < 0$
(Няма реални корени)

Отговор: $x \in \{-5; 0\}$

Задача 12: $|x^2 - 4x + 1.5| = 1.5$

1) $x^2 - 4x + 1.5 = 1.5 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

2) $x^2 - 4x + 1.5 = -1.5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Отговор: $x \in \{0; 1; 3; 4\}$

Задача 13: $|x^2 - 7x + 3| = 3$

1) $x^2 - 7x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 7$

2) $x^2 - 7x + 3 = -3 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 6$

Отговор: $x \in \{0; 1; 6; 7\}$

Задача 14: $|x^2 + 2x + 9| = 1$

1) $x^2 + 2x + 9 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow D = 4 - 32 < 0$ (Няма реални корени)

2) $x^2 + 2x + 9 = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 10 = 0 \Rightarrow D = 4 - 40 < 0$ (Няма реални корени)

Отговор: Няма реални корени

Задача 15: $|x^2 - 3x + 2| = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$

Отговор: $x \in \{1; 2\}$

Задача 16: $|2x^2 - 3x - 2| = -1$

Тъй като абсолютната стойност (модулът) на реален израз винаги е неотрицателно число (≥ 0), равенството на -1 е невъзможно.

Отговор: Няма решение

Задача 17: $|(x + 3)^2 - 2(x + 1)| = 4$

Разкриваме скобите: $x^2 + 6x + 9 - 2x - 2 = x^2 + 4x + 7$

$$|x^2 + 4x + 7| = 4$$

$$1) x^2 + 4x + 7 = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$$

$$2) x^2 + 4x + 7 = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 11 = 0 \Rightarrow D = 16 - 44 < 0$$

(Няма реални корени)

Отговор: $x \in \{-3; -1\}$

Задача 18: $|(x - 2)^2 - 2(x - 1)| = 1$

Разкриваме скобите: $x^2 - 4x + 4 - 2x + 2 = x^2 - 6x + 6$

$$|x^2 - 6x + 6| = 1$$

$$1) x^2 - 6x + 6 = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

$$2) x^2 - 6x + 6 = -1 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow D = 36 - 28 = 8 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$$

Отговор: $x \in \{1; 5; 3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}$

Задача 19: $|x^4 - 5| = 4$

$$1) x^4 - 5 = 4 \Rightarrow x^4 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$2) x^4 - 5 = -4 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Отговор: $x \in \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$

Задача 20: $|16x^4 - 5| = 4$

$$1) 16x^4 - 5 = 4 \Rightarrow 16x^4 = 9 \Rightarrow x^4 = 9/16 \Rightarrow x^2 = 3/4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}/2$$

$$2) 16x^4 - 5 = -4 \Rightarrow 16x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = 1/16 \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow x = \pm 1/2$$

Отговор: $x \in \{-\sqrt{3}/2; -1/2; 1/2; \sqrt{3}/2\}$

Задача 21: $|x^4 - 5x^2 + 2| = 2$

1) $x^4 - 5x^2 + 2 = 2 \Rightarrow x^2(x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{5}$

2) $x^4 - 5x^2 + 2 = -2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm 2$

Отговор: $x \in \{-2; -\sqrt{5}; -1; 0; 1; \sqrt{5}; 2\}$

Задача 22: $|x^4 - 4x^2 + 1.5| = 1.5$

1) $x^4 - 4x^2 + 1.5 = 1.5 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$

2) $x^4 - 4x^2 + 1.5 = -1.5 \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm\sqrt{3}$

Отговор: $x \in \{-2; -\sqrt{3}; -1; 0; 1; \sqrt{3}; 2\}$

Задача 23: $|x^4 - 7x^2 + 3| = 3$

1) $x^4 - 7x^2 + 3 = 3 \Rightarrow x^2(x^2 - 7) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{7}$

2) $x^4 - 7x^2 + 3 = -3 \Rightarrow x^4 - 7x^2 + 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm\sqrt{6}$

Отговор: $x \in \{-\sqrt{7}; -\sqrt{6}; -1; 0; 1; \sqrt{6}; \sqrt{7}\}$

Задача 24: $|x^4 + 2x^2 - 4| = 4$

1) $x^4 + 2x^2 - 4 = 4 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

2) $x^4 + 2x^2 - 4 = -4 \Rightarrow x^4 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$

Отговор: $x \in \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

страница 75

Решения на показательни уравнения (Задачи 5 - 12)

Задача 5

а) $2^{(x^2 + 3x)} = 16 \Rightarrow 2^{(x^2 + 3x)} = 2^4 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

Отговор: $x_1 = -4, x_2 = 1$

б) $3^{(x^2 + 2x)} = 27 \Rightarrow 3^{(x^2 + 2x)} = 3^3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Отговор: $x_1 = -3, x_2 = 1$

в) $5^{(x^2 + 2x)} = 125 \Rightarrow 5^{(x^2 + 2x)} = 5^3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Отговор: $x_1 = -3, x_2 = 1$

г) $7^{(x^2 + x)} = 49 \Rightarrow 7^{(x^2 + x)} = 7^2 \Rightarrow x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Отговор: $x_1 = -2, x_2 = 1$

Задача 6

а) $3 \cdot 2^x + 2^{(x+2)} = 28 \Rightarrow 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 28 \Rightarrow 7 \cdot 2^x = 28 \Rightarrow 2^x = 4$

Отговор: $x = 2$

б) $5 \cdot 3^x + 3^{(x+1)} = 72 \Rightarrow 5 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 72 \Rightarrow 8 \cdot 3^x = 72 \Rightarrow 3^x = 9$

Отговор: $x = 2$

в) $7^{(x+1)} - 2 \cdot 7^x = 245 \Rightarrow 7 \cdot 7^x - 2 \cdot 7^x = 245 \Rightarrow 5 \cdot 7^x = 245 \Rightarrow 7^x = 49$

Отговор: $x = 2$

г) $5^{(x+2)} - 7 \cdot 5^x = 450 \Rightarrow 25 \cdot 5^x - 7 \cdot 5^x = 450 \Rightarrow 18 \cdot 5^x = 450 \Rightarrow 5^x = 25$

Отговор: $x = 2$

Задача 7

а) $2^{(x+3)} - 5 \cdot 2^x = 48 \Rightarrow 8 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = 48 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 48 \Rightarrow 2^x = 16$

Отговор: $x = 4$

б) $3^{(x+2)} - 4 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow 9 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow 5 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow 3^x = 27$

Отговор: $x = 3$

в) $7^{(x+2)} - 6 \cdot 7^x = 301 \Rightarrow 49 \cdot 7^x - 6 \cdot 7^x = 301 \Rightarrow 43 \cdot 7^x = 301 \Rightarrow 7^x = 7$

Отговор: $x = 1$

г) $5^{(x+3)} - 3 \cdot 5^{(x+2)} = 250 \Rightarrow 125 \cdot 5^x - 75 \cdot 5^x = 250 \Rightarrow 50 \cdot 5^x = 250 \Rightarrow 5^x = 5$

Отговор: $x = 1$

Задача 8

а) $2^{(x^2 + 2x)} \cdot 8^x = 4^3 \Rightarrow 2^{(x^2 + 2x)} \cdot 2^{(3x)} = 2^6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

Отговор: $x_1 = -6, x_2 = 1$

б) $3^{(x^2 + x)} \cdot 9^{(x+2)} = 81 \Rightarrow 3^{(x^2 + x)} \cdot 3^{(2x+4)} = 3^4 \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + 3x = 0$

Отговор: $x_1 = 0, x_2 = -3$

в) $5^{(x^2 - x)} \cdot 25^{(2x-1)} = 25 \Rightarrow 5^{(x^2 - x)} \cdot 5^{(4x-2)} = 5^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

Отговор: $x_1 = -4, x_2 = 1$

г) $7^{(x^2 + 2x)} \cdot 49^{(x-1)} = 343 \Rightarrow 7^{(x^2 + 2x)} \cdot 7^{(2x-2)} = 7^3 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

Отговор: $x_1 = -5, x_2 = 1$

Задача 9

а) $2^{(5x-2)} = 1 / 8^{(x-2)} \Rightarrow 2^{(5x-2)} = 2^{(-3(x-2))} \Rightarrow 5x - 2 = -3x + 6 \Rightarrow 8x = 8$

Отговор: $x = 1$

б) $3^{(2x+6)} = 1 / 9^{(x+3)} \Rightarrow 3^{(2x+6)} = 3^{(-2(x+3))} \Rightarrow 2x + 6 = -2x - 6 \Rightarrow 4x = -12$

Отговор: $x = -3$

в) $5^{(3x+2)} = 1 / 25^{(x+4)} \Rightarrow 5^{(3x+2)} = 5^{(-2(x+4))} \Rightarrow 3x + 2 = -2x - 8 \Rightarrow 5x = -10$

Отговор: $x = -2$

г) $49^{(3x-1)} = 1 / 7^{(x+2)} \Rightarrow 7^{(6x-2)} = 7^{(-(x+2))} \Rightarrow 6x - 2 = -x - 2 \Rightarrow 7x = 0$

Отговор: $x = 0$

Задача 10

а) $(2/3)^{(x^2-x)} = (27/8)^{(x-1)} \Rightarrow (2/3)^{(x^2-x)} = (2/3)^{(-3(x-1))} \Rightarrow x^2 - x = -3x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Отговор: $x_1 = -3, x_2 = 1$

б) $(3/5)^{(x^2+x)} = (125/27)^{(x+1)} \Rightarrow (3/5)^{(x^2+x)} = (3/5)^{(-3(x+1))} \Rightarrow x^2 + x = -3x - 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

Отговор: $x_1 = -3, x_2 = -1$

в) $(2/9)^{(x^2+3x)} = (81/4)^{(x+2)} \Rightarrow (2/9)^{(x^2+3x)} = (2/9)^{(-2(x+2))} \Rightarrow x^2 + 3x = -2x - 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

Отговор: $x_1 = -4, x_2 = -1$

г) $(3/7)^{(x^2-3)} = (49/9)^x \Rightarrow (3/7)^{(x^2-3)} = (3/7)^{(-2x)} \Rightarrow x^2 - 3 = -2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Отговор: $x_1 = -3, x_2 = 1$

Задача 11

а) $0,125 \cdot 2^{(x+5)} = 4^{(x+2)} \Rightarrow 2^{-3} \cdot 2^{(x+5)} = 2^{(2x+4)} \Rightarrow x + 2 = 2x + 4$

Отговор: $x = -2$

б) $0,25 \cdot 8^{(x+1)} = 4^x \Rightarrow 2^{-2} \cdot 2^{(3x+3)} = 2^{(2x)} \Rightarrow 3x + 1 = 2x$

Отговор: $x = -1$

в) $\sqrt[3]{2^{(x+5)}} = 1/8 \Rightarrow 2^{((x+5)/3)} = 2^{-3} \Rightarrow (x+5)/3 = -3 \Rightarrow x + 5 = -9$

Отговор: $x = -14$

г) $\sqrt[3]{9^{(x+2)}} = 1/81 \Rightarrow 3^{((2x+4)/3)} = 3^{-4} \Rightarrow (2x+4)/3 = -4 \Rightarrow 2x + 4 = -12$

Отговор: $x = -8$

Задача 12

а) $2^{(x+1)} = 3^x \Rightarrow 2 \cdot 2^x = 3^x \Rightarrow 2 = (3/2)^x$

Отговор: $x = \log_{(3/2)} 2$

б) $3^{(x-2)} = 5^x \Rightarrow 3^x / 9 = 5^x \Rightarrow 1/9 = (5/3)^x$

Отговор: $x = \log_{(5/3)} (1/9)$

в) $2^{(2x-3)} = 7^x \Rightarrow 4^x / 8 = 7^x \Rightarrow 1/8 = (7/4)^x$

Отговор: $x = \log_{(7/4)} (1/8)$

г) $5^{(x-5)} = 7^x \Rightarrow 5^x / 3125 = 7^x \Rightarrow 1/3125 = (7/5)^x$

Отговор: $x = \log_{(7/5)} (1/3125)$

Задачи от 1 до 20

Задача 1. $(2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0)$

Полагаме $(2^x = y > 0)$. Уравнението става: $(y^2 - 10y + 16 = 0)$.

Корените са $((y-2)(y-8) = 0 \implies y_1 = 2, y_2 = 8)$.

Връщаме се към полагането:

1) $(2^x = 2 \implies x = 1)$

2) $(2^x = 8 \implies 2^x = 2^3 \implies x = 3)$

Отговор: $x = 1, x = 3$

Задача 2. $(3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0)$

Полагаме $(3^x = y > 0)$. Уравнението става: $(y^2 - 10y + 9 = 0)$.

Корените са $((y-1)(y-9) = 0 \implies y_1 = 1, y_2 = 9)$.

Връщаме се към полагането:

1) $(3^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(3^x = 9 \implies 3^x = 3^2 \implies x = 2)$

Отговор: $x = 0, x = 2$

Задача 3. $(5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 = 0)$

Полагаме $(5^x = y > 0)$. Уравнението става: $(y^2 - 26y + 25 = 0)$.

Корените са $((y-1)(y-25) = 0 \implies y_1 = 1, y_2 = 25)$.

Връщаме се към полагането:

1) $(5^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(5^x = 25 \implies x = 2)$

Отговор: $x = 0, x = 2$

Задача 4. $(3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0)$

Полагаме $(3^x = y > 0)$. Уравнението става: $(y^2 - 5y + 6 = 0)$.

Корените са $((y-2)(y-3) = 0 \implies y_1 = 2, y_2 = 3)$.

Връщаме се към полагането:

1) $(3^x = 2 \implies x = \log_3 2)$

2) $(3^x = 3 \implies x = 1)$

Отговор: $x = \log_3 2, x = 1$

Задача 5. $(7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0)$

Полагаме $(7^x = y > 0)$. Уравнението става: $(y^2 - 6y + 5 = 0)$.

Корените са $(y_1 = 1, y_2 = 5)$.

Връщаме се към полагането:

$$1) 7^x = 1 \implies x = 0$$

$$2) 7^x = 5 \implies x = \log_7 5$$

Отговор: $x = 0, x = \log_7 5$

Задача 6. $(4^x + 2^{x+1} - 80 = 0)$

Преобразуваме: $((2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 80 = 0)$. Полагаме $(2^x = y > 0)$.

$$(y^2 + 2y - 80 = 0 \implies (y+10)(y-8) = 0 \implies y = 8) \text{ (тъй като } y > 0)$$

$$(2^x = 8 \implies x = 3)$$

Отговор: $x = 3$

Задача 7. $(9^x - 2 \cdot 3^x - 8 = 0)$

$((3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 8 = 0)$. Полагаме $(3^x = y > 0)$.

$$(y^2 - 2y - 8 = 0 \implies (y-4)(y+2) = 0 \implies y = 4)$$

$$(3^x = 4 \implies x = \log_3 4)$$

Отговор: $x = \log_3 4$

Задача 8. $(25^{x-2} - 24 \cdot 5^{x-3} - 1 = 0)$

Записваме като: $(\frac{5^{2x}}{625} - 24 \cdot \frac{5^x}{125} - 1 = 0)$.

Умножаваме по 625: $(5^{2x} - 120 \cdot 5^x - 625 = 0)$. Полагаме $(5^x = y > 0)$.

$$(y^2 - 120y - 625 = 0). \text{ Дискриминанта } (D = 120^2 - 4(-625) = 14400 + 2500 = 16900 = 130^2)$$

$$(y = \frac{120 + 130}{2} = 125 \implies 5^x = 125 \implies x = 3)$$

Отговор: $x = 3$

Задача 9. $(3^x - 3^{2-x} - 8 = 0)$

$(3^x - \frac{9}{3^x} - 8 = 0)$. Полагаме $(3^x = y > 0)$.

$$(y - \frac{9}{y} - 8 = 0 \implies y^2 - 8y - 9 = 0 \implies (y-9)(y+1) = 0 \implies y = 9)$$

$$(3^x = 9 \implies x = 2)$$

Отговор: $x = 2$

Задача 10. $(3 \cdot 9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+1} - 1 = 0)$

$(27 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0)$. Полагаме $(3^x = y > 0)$.

$$(27y^2 - 6y - 1 = 0). (D = 36 - 4 \cdot 27 \cdot (-1) = 144 = 12^2)$$

$$(y = \frac{6 + 12}{54} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \implies 3^x = 3^{-1} \implies x = -1)$$

Отговор: $x = -1$

Задача 11. $(16^x - 5 \cdot 4^{x+1} + 64 = 0)$

$(4^{2x} - 20 \cdot 4^x + 64 = 0)$. Полагаме $(4^x = y > 0)$.

$(y^2 - 20y + 64 = 0 \implies (y-4)(y-16) = 0 \implies y_1 = 4, y_2 = 16)$.

1) $(4^x = 4 \implies x = 1)$

2) $(4^x = 16 \implies x = 2)$

Отговор: $x = 1, x = 2$

Задача 12. $(2^{2(x^2-x)-3} - 2^{x^2-x-2} - 1 = 0)$

Нека $(t = x^2 - x)$. Уравнението става: $(\frac{2^{2t}}{8} - \frac{2^t}{4} - 1 = 0)$.

Умножаваме по 8: $(2^{2t} - 2 \cdot 2^t - 8 = 0)$. Полагаме $(2^t = y > 0)$.

$(y^2 - 2y - 8 = 0 \implies y = 4 \implies 2^t = 4 \implies t = 2)$.

Връщаме се към (t) : $(x^2 - x = 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0)$.

Отговор: $x = 2, x = -1$

Задача 13. $(9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0)$

Преобразуваме: $(\frac{3^{2x^2}}{9} - 36 \cdot \frac{3^{x^2}}{27} + 3 = 0 \implies \frac{3^{2x^2}}{9} - \frac{4}{3} \cdot 3^{x^2} + 3 = 0)$.

Умножаваме по 9: $(3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0)$. Полагаме $(3^{x^2} = y > 0)$.

$(y^2 - 12y + 27 = 0 \implies (y-3)(y-9) = 0 \implies y_1 = 3, y_2 = 9)$.

1) $(3^{x^2} = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1)$

2) $(3^{x^2} = 9 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm \sqrt{2})$

Отговор: $x = \pm 1, x = \pm \sqrt{2}$

Задача 14. $(4^{\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0)$

Допустими стойности: $(x \geq 2)$. Полагаме $(2^{\sqrt{x-2}} = y > 0)$.

$(y^2 - 10y + 16 = 0 \implies y_1 = 2, y_2 = 8)$.

1) $(2^{\sqrt{x-2}} = 2 \implies \sqrt{x-2} = 1 \implies x - 2 = 1 \implies x = 3)$

2) $(2^{\sqrt{x-2}} = 8 \implies \sqrt{x-2} = 3 \implies x - 2 = 9 \implies x = 11)$

Отговор: $x = 3, x = 11$

Задача 15. $(9^{\sqrt{3x}} - 12 \cdot 3^{\sqrt{3x}} + 27 = 0)$

Допустими стойности: $(x \geq 0)$. Полагаме $(3^{\sqrt{3x}} = y > 0)$.

$(y^2 - 12y + 27 = 0 \implies y_1 = 3, y_2 = 9)$.

1) $(3^{\sqrt{3x}} = 3 \implies \sqrt{3x} = 1 \implies 3x = 1 \implies x = \frac{1}{3})$

2) $(3^{\sqrt{3x}} = 9 \implies \sqrt{3x} = 2 \implies 3x = 4 \implies x = \frac{4}{3})$

Отговор: $x = 1/3, x = 4/3$

Задача 16. $(2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0)$

Хомогенно уравнение. Делим двете страни на $(5^{2x} > 0)$:

$(\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 = 0)$. Полагаме $(\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0)$.

$(y^2 + y - 2 = 0 \implies (y-1)(y+2) = 0 \implies y = 1)$.

$(\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \implies x = 0)$.

Отговор: $x = 0$

Задача 17. $(3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0)$

Делим на (7^{2x}) : $(\left(\frac{3}{7}\right)^{2x} + 2\left(\frac{3}{7}\right)^x - 3 = 0)$. Полагаме $(\left(\frac{3}{7}\right)^x = y > 0)$.

$(y^2 + 2y - 3 = 0 \implies y = 1 \implies x = 0)$.

Отговор: $x = 0$

Задача 18. $(4^x + 2 \cdot 14^x - 3 \cdot 49^x = 0)$

Записваме като: $(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0)$. Делим на (7^{2x}) :

$(\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} + 2\left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 = 0 \implies y = 1 \implies x = 0)$.

Отговор: $x = 0$

Задача 19. $(5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0)$

Разделяме на (25^x) : $(5\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2 = 0)$. Полагаме $(\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0)$.

$(5y^2 - 7y + 2 = 0)$. Корените са $(y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{5})$.

1) $(\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5} \implies x = 1)$

Отговор: $x = 0, x = 1$

Задача 20. $(4 \cdot 25^x - 21 \cdot 10^x - 25 \cdot 4^x = 0)$

Разделяме на (4^x) : $(4\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 21\left(\frac{5}{2}\right)^x - 25 = 0)$. Полагаме $(\left(\frac{5}{2}\right)^x = y > 0)$.

$(4y^2 - 21y - 25 = 0 \implies (y+1)(4y-25) = 0 \implies y = \frac{25}{4})$.

$(\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \implies x = 2)$.

Отговор: $x = 2$

Задачи от 31 до 42

страница 83

1

Задача 31. $(4^x + 2^{x+1} - 80 = 0)$

Идентична на Задача 6. $(y^2 + 2y - 80 = 0 \implies y = 8 \implies x = 3)$.

Отговор: $x = 3$

2

Задача 32. $(2^x + 2^{2-x} = 5)$

$(2^x + \frac{4}{2^x} = 5 \implies y + \frac{4}{y} = 5 \implies y^2 - 5y + 4 = 0)$.

Корените са $(y_1 = 1, y_2 = 4)$.

1) $(2^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(2^x = 4 \implies x = 2)$

Отговор: $x = 0, x = 2$

3

Задача 33. $(3^x + 3^{2-x} = 10)$

$(3^x + \frac{9}{3^x} = 10 \implies y^2 - 10y + 9 = 0 \implies y_1 = 1, y_2 = 9)$.

1) $(3^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(3^x = 9 \implies x = 2)$

Отговор: $x = 0, x = 2$

4

Задача 34. $(2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x)$

Групираме еднаквите основи: $(8 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 3^x + 3^x \implies 9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x)$.

Разделяме: $(\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9} \implies \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \implies x = 2)$.

Отговор: $x = 2$

5

Задача 35. $(4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 2^{2x})$

Тъй като $(2^{2x} = 4^x)$: $(4 \cdot 4^x + 4^x = 9 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x \implies 5 \cdot 4^x = 5 \cdot 3^x)$.

$(4^x = 3^x \implies \left(\frac{4}{3}\right)^x = 1 \implies x = 0)$.

Отговор: $x = 0$

6

Задача 36. $(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 5^x + 5^{x+1})$

Изнасяме пред скоби: $(2^x(1 + 2 + 4) = 5^x(2 + 5) \implies 7 \cdot 2^x = 7 \cdot 5^x)$.

$(2^x = 5^x \implies x = 0)$.

Отговор: $x = 0$

7

Задача 37. $(\frac{6}{4^{x-2}} - \frac{5}{4^{x+1}} = 2)$

Полагаме $(4^x = y > 0)$ $(y \neq 2)$.

$(\frac{6}{y-2} - \frac{5}{y+1} = 2 \implies 6(y+1) - 5(y-2) = 2(y-2)(y+1))$.

$(y + 16 = 2(y^2 - y - 2) \implies 2y^2 - 3y - 20 = 0)$.

$(D = 9 - 4(2)(-20) = 169 = 13^2)$.

$(y = \frac{3+13}{4} = 4 \implies 4^x = 4 \implies x = 1)$ (вторият корен е отрицателен).

Отговор: $x = 1$

8

Задача 38. $\left(\frac{8}{5^x-3} - \frac{6}{5^{x+1}} = 3\right)$

Полагаме $(5^x = y > 0)$ $(y \neq 3)$.

$\left(\frac{8}{y-3} - \frac{6}{y+1} = 3 \implies 8(y+1) - 6(y-3) = 3(y-3)(y+1)\right)$.

$(2y + 26 = 3(y^2 - 2y - 3) \implies 3y^2 - 8y - 35 = 0)$.

$(D = 64 - 4(3)(-35) = 484 = 22^2)$.

$(y = \frac{8+22}{6} = 5 \implies 5^x = 5 \implies x = 1)$.

Отговор: $x = 1$

9

Задача 39. $(8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0)$

$(2^{3x} - 2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 8 = 0)$. Групираме:

$(2^{2x}(2^x - 1) - 8(2^x - 1) = 0 \implies (2^{2x} - 8)(2^x - 1) = 0)$.

1) $(2^x = 1 \implies x = 0)$

2) $(2^{2x} = 8 \implies 2^{2x} = 2^3 \implies 2x = 3 \implies x = 1.5)$

Отговор: $x = 0, x = 1.5$

10

Задача 40. $(4 \cdot 20^x - 20 \cdot 5^{x-1} - 5 \cdot 4^{x+1} + 20 = 0)$

Преобразуваме: $(4 \cdot 4^x \cdot 5^x - 4 \cdot 5^x - 20 \cdot 4^x + 20 = 0)$.

Разделяме на 4: $(4^x \cdot 5^x - 5^x - 5 \cdot 4^x + 5 = 0)$.

Групираме: $(5^x(4^x - 1) - 5(4^x - 1) = 0 \implies (5^x - 5)(4^x - 1) = 0)$.

1) $(5^x = 5 \implies x = 1)$

2) $(4^x = 1 \implies x = 0)$

Отговор: $x = 0, x = 1$

11

Задача 41. $(5 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0)$

$(5 \cdot 3^x \cdot 5^x - 15 \cdot 5^x - 3^x + 3 = 0)$.

Групираме: $(5 \cdot 5^x(3^x - 3) - 1(3^x - 3) = 0 \implies (5 \cdot 5^x - 1)(3^x - 3) = 0)$.

1) $(3^x = 3 \implies x = 1)$

2) $(5^{x+1} = 1 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1)$

Отговор: $x = -1, x = 1$

12

Задача 42. $(6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 = 0)$

$(2^x \cdot 3^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 = 0)$.

Групираме: $(3^x(2^x - 8) - 9(2^x - 8) = 0 \implies (3^x - 9)(2^x - 8) = 0)$.

1) $(3^x = 9 \implies x = 2)$

2) $(2^x = 8 \implies x = 3)$

Отговор: $x = 2, x = 3$